AndrzejSolecki

Cálculo de Proposições

Criamos duas gavetas, uma para constatações verdadeiras, outra para constatações falsas. O que coube nelas tem direito a ser chamado de uma **proposição**. Portanto trabalhamos só com as construções que não deixam dúvidas sobre a existência de objetos descritos, sobre sentido, sobre coringas ("variáveis") e não se preocupamos *como* estabelecer a qual das gavetas uma constatação pertence. O conjunto de todas essas constatações denotamos por $\mathcal{P}$, o fato que a constatação $p \in \mathcal{P}$ está verdadeira destacamos usando a notação $p \sim 1$, para p falsa escrevemos $p \sim\ 0$ e podemos imediatamente partir para a próxima pergunta: Como descrever a construção de "negação" na linguagem formalizada da matemática?

O que nega-se? As proposições? Ótimo. E que tipo de objeto é uma proposição negada? É de novo uma proposição? Então como descrever a função "negação"? (Quer dizer: qual é o seu conjunto de partida? e de chegada?)

Seria perfeito se tivéssemos tempo para você deliberar bastante sobre esta formalização – até o momento que ela seria indiscutivelmente a *sua* criação, o *seu* produto intelectual. Mas. . . Bem, temos que avançar com grandes pulos. Eis é a definição que seguramente você conhece da escola:

A **negação** é uma função definida no conjunto de proposições, seus valores são também proposições e a sua atuação consiste em modificação do valor "verdade" ou "falso" de cada proposição. Notação formalizada:

α	**0**	**1**
$\neg\alpha$	**1**	**0**

(A primeira linha descreve o nome do argumento e a listagem dos argumentos. A segunda – a notação do valor e a listagem dos valores correspondentes.)

O que pode ser feito ainda quando só uma variável percorre o conjunto de proposições? Há uma outra função evidente, a que "não faz nada" – que a cada α atribui o valor α. Na sua opinião, qual seria o nome adequado para ela? Conhece o nome que ela de fato ganha na matemática? Consegue descrevé-la por meio de uma tabela parecida com a anterior?

Exercício. Há outras possíveis funções de 1 argumento lógico (isto é, que dependem de uma variável só)?

Reformulação: é possível inventar outras tabelas de funções que levam o conjunto $\{\mathbf{0}\,,\mathbf{1}\}$ em $\{\mathbf{0}\,,\mathbf{1}\}$? Quantas? Como descobrir a quantidade sem de fato construílas? Qual sentido elas teriam (quer dizer: há algum tipo de construção em língua portugesa a qual tal função corresponderia?)

Passamos agora a analizar as construções que envolvem duas proposições. Naturalmente a primeira delas é aquela que junta umas proposições usando a palavra "ou". Isto é: a alternativa.

Procure encontrar (por sua própria conta, sem a ajuda dos livros ou professores da Universidade) várias diferênças entre o cotidiano sentido de "alternativa" e este termo em suas aplicações matemáticas (que inevitavelmente você já viu com frequência). Só depois passe a analizar a questão:

Como na lógica matemática define-se a "alternativa"?

Alternativa é uma função que atribui a cada par de proposições uma nova proposição do modo que o valor lógico de proposição obtida pode dar "falso" somente se ambos os argumentos são falsos. Em uma notação formalizada:

$\vee$	**0**	**1**
0	**0**	**1**
1	**1**	**1**

(Esta vez não faço uma listagem de todas as possíveis quatro configurações de argumentos e correspondentes valores que atribuo a eles. Uso uma notação mais sucinta, conhecida desde a 3ª serie de 1º grau – a de tabuada. Os pares de argumentos estão colocados em linhas e em colunas. Os obtidos valores encontram-se no cruzamento de adequada linha com adequada coluna.)

Esqueça por um momento a sensata e digna origem da tabelinha. Reflita sobre o seu lado puramente formal (para não dizer: o seu lado lúdico) e responda a seguinte pergunta

Exercício. Quantas distintas funções de 2 argumentos pode-se imaginar para o conjunto $\mathcal{P}$? Isto é: quantas diferentes tabelinha desse tipo é possível formar?

Bem, suponho que não custa muito esforço chegar a uma resposta (que é correta) mas logo surge uma dúvida: quais dessas funções provêm de sensatas construções utilizadas na língua natural? E quais seriam apenas um divertimento fútil parecido às palavras cruzadas ou jogo de cartas?

Seguramente essas tabelas podem ser incluidas no grupo de funções úteis:

conjunção

$\wedge$	**0**	**1**
0	**0**	**0**
1	**0**	**1**

equivalência

$\equiv$	**0**	**1**
0	**1**	**0**
1	**0**	**1**

inequivalência

$\not\equiv$	**0**	**1**
0	**0**	**1**
1	**1**	**0**

Mas a mais importante (e possivelmente a mais complicada) de todas elas é a implicação. Vamos estudá-la com cuidado e carinho, eis a sua definição.

implicação

$\Rightarrow$	**0**	**1**
0	1	1
1	0	1

Dependências entre as função recém-introduzidas

Logo vamos ver como são importantes as seguintes relações entre os nossos novos objetos – importantes pois descrevem de modo excelente as ligações entre aquelas construções da língua natural que deram origem a nossas formalizações matematizadas.

Leis de **de Morgan** (como negar uma alternativa ou uma conjunção):

$$\neg(\alpha \vee \beta) \qquad \sim \qquad (\neg\alpha) \wedge (\neg\beta)$$

$$\neg(\alpha \wedge \beta) \qquad \sim \qquad (\neg\alpha) \vee (\neg\beta)$$

Como dizer "se ... então ..." sem "se", dizendo "ou ... ou ..."?

$$\alpha \Rightarrow \beta \qquad \sim \qquad (\neg\alpha) \vee \beta$$

Como negar a implicação?

$$\neg(\alpha \Rightarrow \beta) \qquad \sim \qquad \alpha \wedge (\neg\beta)$$

A lei de **contraposição**:

$$\alpha \Rightarrow \beta \qquad \sim \qquad (\neg\beta) \Rightarrow \neg\alpha$$

Uma contradição:

$$\forall_\alpha \quad \alpha \wedge (\neg\alpha) \qquad \sim \qquad \mathbf{0}$$

Uma tautologia (a lei do **meio excluido**):

$$\forall_\alpha \quad \alpha \vee (\neg\alpha) \qquad \sim \qquad \mathbf{1}$$