

Exercícios, Álgebra linear, lista 2

MTM 5245, turma 236A

Em todos os exercícios usamos o sistema de coordenadas com vetores básicos e_1, e_2 mutuamente perpendiculares e de comprimento 1, isto é $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$.

1. Vetores \vec{u}, \vec{v} junto com \mathcal{O} e $\vec{u} + \vec{v}$ formam um paralelograma. Qual vetor que inicia em \mathcal{O} tem o ponto final no cruzamento das diagonais do paralelograma?
2. Um ponto percorre a reta f com velocidade uniforme. No momento $t = 1$ está em ponto $P(3, 7)$, no momento $t = 2$ está em ponto $R(2, 5)$. Onde o ponto encontra-se no momento $t = 4$?
3. A reta g passa por ponto $P(1, 1)$ e é perpendicular ao vetor $\vec{u} = [0, 2]$. Qual é a equação geral dela? Qual é a sua distância da origem do sistema de coordenadas?
4. A reta h é dada pela equação $y = 3x + 1$. Qual é o ângulo entre h e o eixo Ox ? Qual é a distância entre h e a origem do sistema de coordenadas? (Expresse o ângulo em radianos, usando a função *arco cosseno*).
5. Imagine que o cubo está no espaço na posição regular, isto é, os seus vértices têm coordenadas $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$. Cada par das diagonais forma o mesmo ângulo. Qual é o ângulo?
6. No espaço o vetor $u = [3, y, z]$ é perpendicular aos vetores $[1, -1, 2]$ e $[2, 2, -3]$. Ache y, z .
7. Claramente os planos com equações

$$x - 3y + 2z + 8 = 0 \quad \text{e} \quad -x + 4y - 2z - 3 = 0$$

não são paralelos. Qual ângulo eles formam?

8. Qual é a distância entre os planos $3x - 5y + 4z \pm 10 = 0$?
9. A multiplicação de matrizes expressa a composição de duas transformações. No caso de rotações isto é a rotação por ângulo que é a soma dos ângulos das duas rotações. Use o recurso da multiplicação das matrizes para obter as fórmulas sobre $\cos(\alpha + \beta)$ e $\sin(\alpha + \beta)$.
10. Escreva matrizes de reflexões no plano em retas que passam pela origem do sistema de coordenadas formando os ângulos α e β com o eixo Ox . Multiplique-as para constatar que obtemos uma rotação ao redor da origem. Qual é o ângulo dela?
11. Use mais uma vez a multiplicação de matrizes, esta vez de uma rotação e uma reflexão para provar que a transformação obtida é uma reflexão. Ache o ângulo que o eixo dela forma com Ox .
12. Aceite a veracidade do *teorema de Cauchy* sobre os determinantes:
- $$\det(A \cdot B) = (\det A) \cdot (\det B).$$
- Use-o para decidir quando a composição de n reflexões é uma reflexão e quando é uma rotação.
13. Ache matriz de multiplicação (no plano) por escalar 7. Depois faça o mesmo no espaço.
14. Ache matriz de projeção perpendicular do plano na bissetriz do 1º (e 3º, claramente) quadrante.
15. Ache matriz de projeção do plano no eixo Ox , paralela à reta com equação reduzida $y = \pi x + 2$.
16. Escreva em palavras o que significam as condições escritas com “delta de Kronecker”: $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$
17. Base $[e_1 \ e_2]$ no plano é fixa e transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ leva vetor $e_1 + e_2$ em $3e_1 + 4e_2$ e $e_1 - e_2$ em $2e_1 + e_2$. Ache matriz de T.

18. Ache matriz da mudança de base de \mathbb{R}^2 se $[e_1 \ e_2]$ é levada
 (i) em $[e_2 \ e_1]$, (ii) em $[e_2 \ e_1+e_2]$.
19. No espaço \mathbb{R}^3 com base habitual formamos nova base de vetores $[f_1 \ f_2 \ f_3]$ que são vértices do cubo em posição regular (veja lista 3, ex.5) do semiplano superior, situados acima do 1º 2º e 4º quadrante do plano Oxy . Ache matriz da transformação.
20. Escreva matrizes de rotações de $\pi/4$ e $\pi/3$ em base ortonormal.
21. Escreva matrizes de rotações de $\pi/4$ e $\pi/3$ em base formada por dois vetores de comprimento 1 e com $\langle e_i, e_j \rangle = 1/2$.
22. Escreva matrizes de rotações de $\pi/4$ e $\pi/3$ em base formada por dois vetores de comprimento 1 e com $\langle e_i, e_j \rangle = 1/2$.
23. Escreva matrizes de rotações de $\pi/4$ e $\pi/3$ em base formada por dois vetores definidos pelas condições seguintes:
- $$\langle e_1, e_1 \rangle = 1, \quad \langle e_1, e_2 \rangle = 1, \quad \langle e_2, e_2 \rangle = 4.$$
24. Ache matriz (em base ortonormal) de projeção do plano na reta (dentro do plano) que forma o ângulo $\pi/6$ com eixo Ox .
25. Trate a mesma transformação como uma função de \mathbb{R}^2 em \mathbb{R}^1 (função do plano na reta) com vetor básico no contradomínio tendo o mesmo comprimento 1 que os vetores de \mathbb{R}^2 .
26. Mais matrizes – de duas projeções de \mathbb{R}^2 em \mathbb{R}^2 , para retas que formam ângulos $\pi/4$ e $3\pi/4$ com Ox .

Nos exercícios seguintes usaremos estas matrizes:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

27. Usamos a fórmula $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ (*notável, chamam-na!*) para $a=A$ e $b=B$ mas temos um erro. O que aconteceu?
28. $A^7 = ?$
29. $B^8 = ?$
30. $C^9 = ?$
31. $A^{10} = ?$

Nos exercícios 32 – 40, quais conjuntos formam espaços lineares sobre o corpo dos números reais? Justifique cada resposta. No caso de resposta negativa tem que aparecer um exemplo e explicação qual dos axiomas foi violado.

32. Funções que têm raízes em todos os números naturais.
33. Funções que têm duas derivadas.
34. Funções delimitadas. $(\exists M \in \mathbb{R} \forall x \in \mathbb{R} |f(x)| < M)$.
35. Polinômios de grau 3.
36. Polinômios de graus pares.
37. Polinômios compostos exclusivamente de termos de graus pares.
38. Polinômios que são funções pares.
Muito cuidado quando se fala de grau! Não perca o elemento neutro!
39. Funções que têm raízes.
40. Matrizes quadradas que têm zeros na diagonal principal.
41. Dê um exemplo de $T \in TL$ tal que $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in Ker T$
42. U_1 contém a bissetriz do primeiro quadrante, ache algum subespaço linear U_2 do plano tal que $\mathbb{R}^2 = U_1 \oplus U_2$

43. Descreva todos os subespaços lineares de dimensão 1 no plano.
44. O que significa que duas matrizes são conjugadas?
45. Se A é matriz de uma reflexão no plano em reta que forma α com Ox (base é ortonormal), o que sabemos sobre $\det A$?
46. Dê um exemplo de $A \in L(3; \mathbb{R})$ com posto 2.
47. $T \in TL$ é dada por meio de matriz $A \in L(n; \mathbb{R})$. Como se define os seus vetores próprios?
48. $T \in TL$ é descrita por $A \in L(5, 6; \mathbb{R})$ (5 linhas, 6 colunas), o seu posto é 2. Qual é dimensão do núcleo da transformação?
49. No plano sistema de coordenadas é dado pela base $[e_1 \ e_2]$ e temos $f_1 = 2e_1 - e_2, f_2 = 3e_1 - 2e_2, u = 3e_1 + 5e_2$. Quais são componentes de u em sistema de coordenadas com base $[f_1 \ f_2]$?
50. Uma isometria do plano levou $(1, 2)$ em $(10, 0)$ e $(-2, 6)$ em (x, y) . Qual equação satisfaz o par x, y ?
51. Dê um exemplo de 2 matrizes 2×2 com iguais polinômios característicos mas não conjugadas.
52. Descreva $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ com $\text{Ker}T$ que consiste da reta com equação $y = x$.
53. Explique porque os vetores

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -x \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ x+1 \end{pmatrix}$$

formam um sistema linearmente independente para cada $x > 0$.

54. Ache uma reta paralela à reta k sabendo que a distância entre elas é 5 e k tem equação $12x - 5y = 0$.

55. Retas h, k formam ângulos α, β com eixo $0x$. Composição de reflexões do plano em reta h e posteriormente em reta k resulta em uma rotação do plano (justifique geometricamente esta afirmação). Descubra *por meio do cálculo com matrizes* o ângulo desta rotação.
56. No conjunto V de pares $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ definimos adição usual mas a multiplicação por escalar $s \in \mathbb{R}$ é definida assim: $s(x, y) = (sx, y)$. O conjunto V é um espaço vetorial sobre o corpo \mathbb{R} ?
57. Quais são valores próprios da transformação idêntica em V de dimensão 3? Quais são os seus vetores próprios dela?
58. Esta vez tome $T : V \longrightarrow V$ onde $\dim V = \dim(\text{Ker}(T))$, o que sabemos sobre os valores e vetores próprios?
Ache valores próprios e seus correspondentes vetores próprios para as matrizes dadas nos próximos exemplos.

59.

$$K = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

60.

$$M = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

61.

$$N = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

62. Ache decomposição de \mathbb{R}^3 em soma direta de subespaços lineares que correspondem aos valores próprios da matriz

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Descreva o sentido geométrico da transformação descrita por R .