Exercícios variados

1. Confira se o conjunto $\{u, v, w\}$ de vetores em $\mathbb{R}^3$ é linearmente independente. Justifique (em português) o procedimento adotado.

$$u = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \ , \quad v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \ , \quad w = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \ .$$

2. Ache algum vetor v em $\mathbb{R}^2$ tal que junto com o vetor $u = \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \end{pmatrix}$ os vetores $\{u, v\}$ formarão uma base se $\mathbb{R}^2$.
   Explique (em português) o procedimento adotado.

3. Escreva um sistema homogêneo de 3 equações lineares com 2 variáveis. Depois escreva um sistema não–homogêneo de 2 equações lineares com 3 variáveis.

4. O que significa que W é um subespaço linear do espaço linear V?

5. O que significa que o espaço linear V é a soma direta de subespaços A e B?

6. O subespaço linear A do espaço $\mathbb{R}^2$ é definido como
$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = -3y\} \, .$$
   Ache algum subespaço B tal que $\mathbb{R}^2 = A \oplus B$.

7. Dê dois exemplos diferentes de espaços lineares de dimensão infinita.

8. Ache polinómio característico, valores próprios e vetores próprios da matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \qquad ou \qquad B = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

9. Conjugue a matriz A pela matriz

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

10. Ache a matriz da mudança da base, se saimos da velha base padronizada (vetores perpendiculares, ambos de comprimento 1) e passamos à base onde o novo primeiro vetor é o antigo segundo e o novo segundo vetor tem comprimento 2, fica no primeiro quadrante do plano, na reta bissetriz desse quadrante.

(Variante com outros dados: o novo primeiro vetor é o antigo segundo triplicado e o novo segundo vetor tem comprimento 10, fica no terceiro quadrante do plano, na reta bissetriz desse quadrante.)

11. Resolva duas vezes o seguinte sistema de equações lineares:

$$\begin{cases} x \qquad\; - z = 3 \\ -x + 3y + 3z = 4 \\ x + \;y + 5z = 0 \end{cases}$$

A primeira solução deve ser obtida usando a regra de Cramer, a segunda usando o cálculo de matriz inversa.

12. Explica todos os passos de cálculo da matriz inversa de uma matriz quadrada $A \in L(n, \mathbb{R})$.

13. Calcule a matriz de produtos escalares $(\langle f_i, f_j \rangle)$ com $i, j = 1, 2$, se a base $\{e_1, e_2\}$ é ortonormal e $f_1 = 2 \cdot e_1 - 5 \cdot e_2$, $f_2 = -7 \cdot e_1 + 2 \cdot e_2$.

14. Defina 10 das seguintes noções:

- polinômio impar;
- produto escalar de dois vetores 2-dimensionais;
- norma do vetor;
- espaço vetorial;
- uma base do espaço vetorial;
- subespaço vetorial;
- base ortonormal;
- dimensão do espaço vetorial;
- transformação linear;
- núcleo de TL;
- transformação ortogonal;
- sistema homogêneo de equações lineares;
- determinante de matriz quadrada 3×3;
- polinômio característico de matriz quadrada;
- vetor próprio de TL.