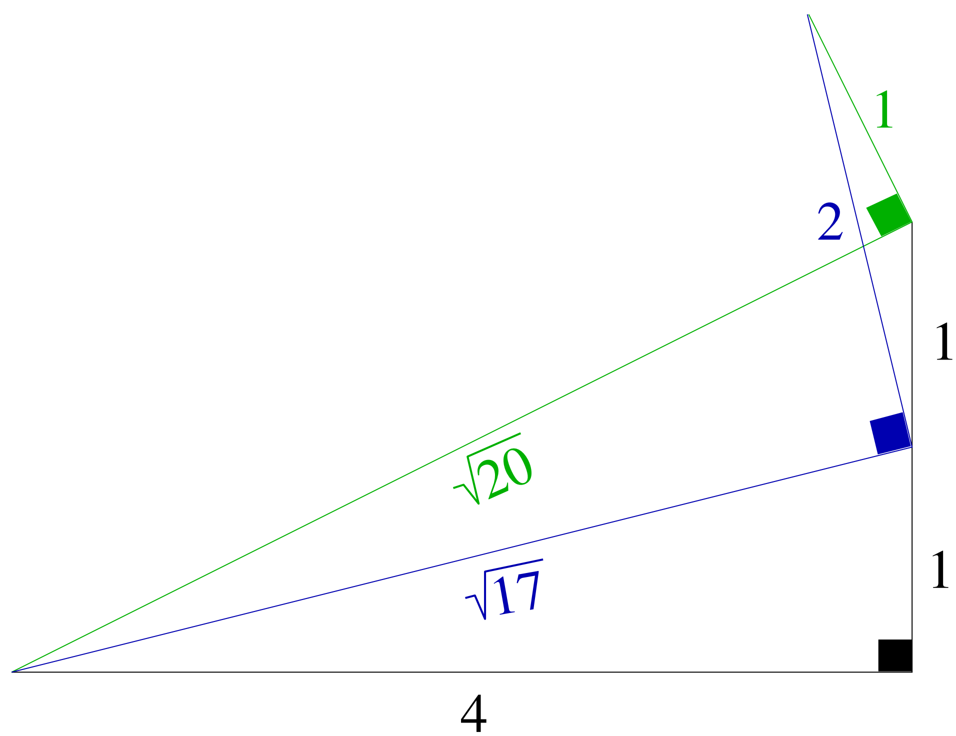
Andrzej Solecki

O triângulo inexistente

Se quiser esboçar um intervalo com medida $\sqrt{21}$, o método mais eficiente usa o teorema sobre os ângulos central e periférico, apoiados na mesma corda: trace uma semicircunferência com diametro 5, a hipotenusa do triângulo retângulo; de um dos pontos finais dela trace um arco de raio 2, o ponto de encontro dos arcos fornece um dos catetos. Pelo teorema de Pitágoras, o outro cateto mede $\sqrt{21}$.

Note que andando pelo caminho menos eficiente a gente encontra uma armadilha muito interessante. Tentando obter $\sqrt{21}$ como a hipotenusa (como entra aqui o teorema de Euler-Fermat sobre os números naturais que são somas de quadrados?) precisamos construir dois auxiliares triângulos retângulos em uma das duas maneiras.

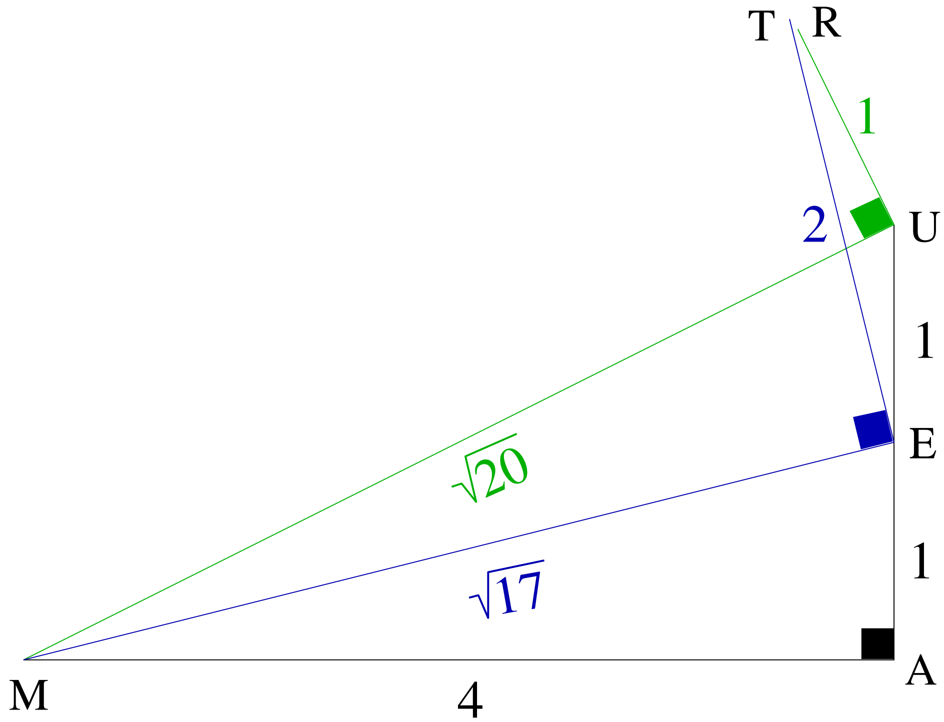
- No início formamos $\sqrt{20} = \sqrt{4^2 + 2^2}$ e depois $\sqrt{21} = \sqrt{\sqrt{20}^2 + 1^2}$;
- podemos no início formar $\sqrt{17} = \sqrt{4^2 + 1^2}$ e depois $\sqrt{21} = \sqrt{\sqrt{17}^2 + 2^2}$.



Oops... alguma coisa está errada. Não existe um triângulo com lados que medem $2, 1, 1$. Onde está o erro?

A explicação está na próxima página. Sugiro não ligar para isso e resolver o problema sem a minha ajuda.

Ok, se você precisa de ajuda, aí vamos nós. É verdade que $\sqrt{21} = \sqrt{(\sqrt{17})^2 + 2^2}$ e que $\sqrt{21} = \sqrt{(\sqrt{20})^2 + 1^2}$ e que ambas as identidades produzem pontos em distância $\sqrt{21}$ do ponto M, mas no plano há infinitude de pontos com esta propriedade, eles formam uma circunferência! Os pontos R e T ficam nela mas não coincidem. Sim, são bastante próximos, logo vamos medir *qual é* a proximidade deles.



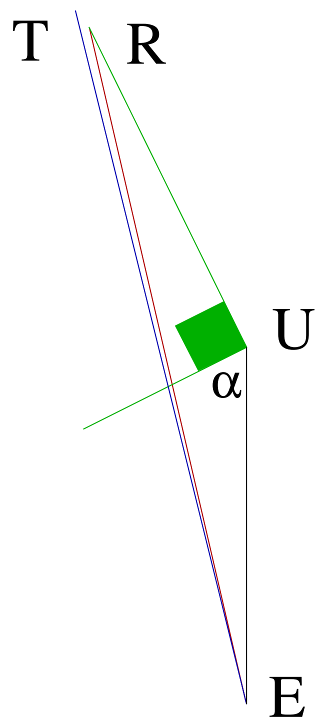
Vou usar a notação vetorial para achar as coordenadas dos pontos (no sistema padronizado, mas não destacado no esboço). A exatidão fornecida aqui é de três casas decimais.

$$MT = ME + ET = \begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix} + \frac{2}{\sqrt{17}}\begin{pmatrix}-1\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{68-2\sqrt{17}}{17}\\ \frac{17+8\sqrt{17}}{17}\end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix}3,515\\2,94\end{pmatrix}$$

$$MR = MU + UR = \begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{20-\sqrt{5}}{5}\\ \frac{10+2\sqrt{5}}{5}\end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix}3,553\\2,894\end{pmatrix}$$

A distância $|RT|$ é aproximadamente 0,059 – se a unidade é o centímetro, é fácil errar no desenho afastando-se por 0,6 milímetro.

Qual é o real comprimento do lado $|ER|$? O teorema dos cossenos (estudado na escola) traz a resposta.



Do triângulo $\triangle MAU$ com catetos 4 e 2 podemos ver que $\cos\alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$, daqui $\operatorname{sen}\alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ e, consequentemente, $\cos(\frac{\pi}{2}+\alpha) = -\operatorname{sen}\alpha = \frac{-2\sqrt{5}}{5}$, portanto o resultado é

$$|ER|^2 = 1^2 + 1^2 - 2\cdot 1\cdot 1\cdot(-\operatorname{sen}\alpha) = \frac{10+4\sqrt{5}}{5}\ ; \qquad |ER| \approx 1,946\ .$$

A diferença não é grande, mas o que importa é que $|ER| \neq 2$. Felizmente.

A moral da história.

Deveras estranhos serão os teus triângulos se o teu lápis não tem ponta fina e o teu compasso vem de 1,99.

O original em polonês apareceu em

`http://andsol.blox.pl/2011/04/Niemozliwy-trojkat.html`